

すうがくパパの着想ノート

～数式問題編～



こんにちは、「すうがくパパの着想ノート」へようこそ！

このノートは、B5 サイズで印刷して使える学習プリントです。全部まとめて 1 冊にしてもいいですし、必要なページだけをプリントしてルーズリーフにとじたり、ノートに貼ったりして使っても OK です。

【問題】と【解答】は同じページにあるので、自分で解いたあと、すぐに答え合わせができます。

【解説】は別のページにしてあるので、解き方をじっくり見比べて、自分の考え方とどう違ったかを確認できます。

さらに、💡 **着想の
ポイント** というコーナーでは、「どんなふうにはじめるとよいか」をわかりやすく紹介しています。

このノートを使って、「考える力」「ひらめく力」をどんどん育てていきましょう！

【問題①】

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^4 + 4$

(2) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

(3) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

【解答①】

(1) $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

(2) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15 = (x+6)(x+2)(x^2 + 8x + 10)$

(3) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$

【解説①】

(1)



この問題の特徴は、「このままでは変形しようがない」という点です。

このようなケースでは、何かを足して、そのあと同じものを引くことを考えましょう。

つまり、 $x^4 + 4$ + ◎ - ◎

としたうえで、

$$(x^4 + 4 + \textcircled{\circ}) - \textcircled{\circ}$$

とまとめることで、 $A^2 - B^2$ の形にできないかを考えるのが良さそうです。

そこで、

$(x^4 + 4 + \textcircled{\circ})$ が何かの二乗になるような ◎ を考えてみます。

ここで、

x^4 は x^2 の二乗、4 は 2 の二乗なので、

$$x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$$

が思い浮かぶと思います。これを変形すると、

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$$

となりますね。これで、 $A^2 - B^2$ の形になりました。

したがって、

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = \{(x^2 + 2) + 2x\}\{(x^2 + 2) - 2x\} = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

になります。

(2)



この式をマトモに全部展開するのはシンドイですね。

でも、この式をよく見ると $x+1$ 、 $x+3$ 、と 2 ずつ増えている 点に気づくと思います。

そこで、

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$$

ペア②
ペア①

といった形でペア①、ペア②で組み合わせることによって、

$$\underbrace{(x^2 + 8x + 7)}_{\text{ペア①}} \underbrace{(x^2 + 8x + 15)}_{\text{ペア②}} + 15$$

となり、ともに x^2+8x で揃えることができるのです。

ここで、

$$x^2 + 8x = M \text{ とすると、}$$

$$(M+7)(M+15)+15$$

と表されます。

$$\text{これを展開すると、} (M+7)(M+15)+15 = M^2 + 22M + 120 = (M+12)(M+10)$$

と因数分解できます。

したがって、M を元に戻すと

$$(x^2 + 8x + 12)(x^2 + 8x + 10) = (x+6)(x+2)(x^2 + 8x + 10)$$

となります。

(3)



この式の特徴は、各パーツが a, b, c で循環している点です。

こういうケースは因数分解の形がよく見えないので、一つの文字に着目して整理しましょう。

たとえば、 a に注目してまとめてみると、

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = (b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + b^2c - bc^2$$

になります。

これは $b-c$ でまとめられそうですね。つまり、

$$\begin{aligned} & (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) = -(a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

となります。