

すうがくパパの着想ノート

～関数編～



こんにちは、「すうがくパパの着想ノート」へようこそ！

このノートは、B5 サイズで印刷して使える学習プリントです。全部まとめて 1 冊にしてもいいですし、必要なページだけをプリントしてルーズリーフにとじたり、ノートに貼ったりして使っても OK です。

【問題】と【解答】は同じページにあるので、自分で解いたあと、すぐに答え合わせができます。

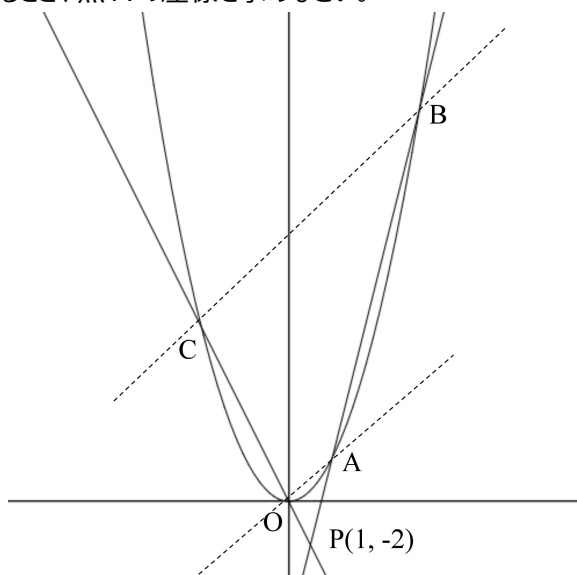
【解説】は別のページにしてあるので、解き方をじっくり見比べて、自分の考え方とどう違ったかを確認できます。

さらに、💡 **着想の
ポイント** というコーナーでは、「どんなふうにはじめるとよいか」をわかりやすく紹介しています。

このノートを使って、「考える力」「ひらめく力」をどんどん育てていきましょう！

【問題①】

下図のように点 $P(1, -2)$ を通る 2 本の直線が放物線 $y = x^2$ と 4 点 O 、 A 、 B 、 C で交わっている。
 OA と BC が平行となると、点 A の座標を求めなさい。



【解答①】

$A(2, 4)$

【解説①】

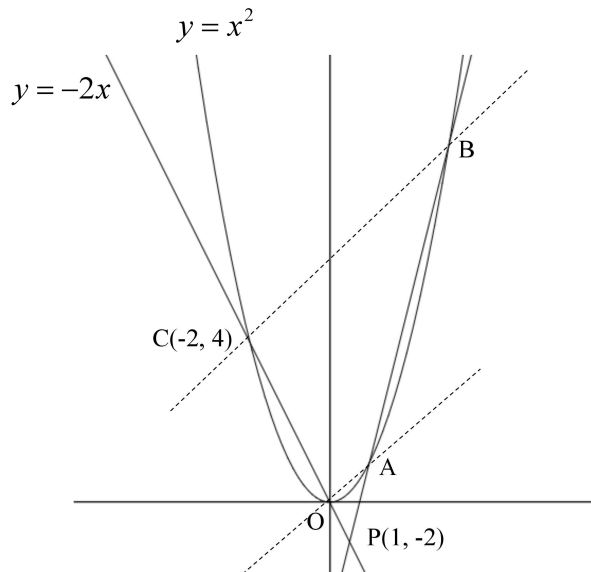


まずは問題を解く前に、問題文と図から分かることを書き留めましょう。

放物線は $y = x^2$ 、直線 OP は $y = -2x$ 、

点 C は放物線と直線 OP との交点なので

$x^2 = -2x$ から $C(-2, 4)$ と分かります。



そのうえで、

点 A、B は放物線上にあるということ……①

点 P、A、B は一直線上にあること……②

OA と BC が平行であること……③

をどう使っていくかが問題になります。条件が多すぎるのが悩ましいですね。。

例えば A や B の座標に着眼して連立方程式を立てたくなりますが、

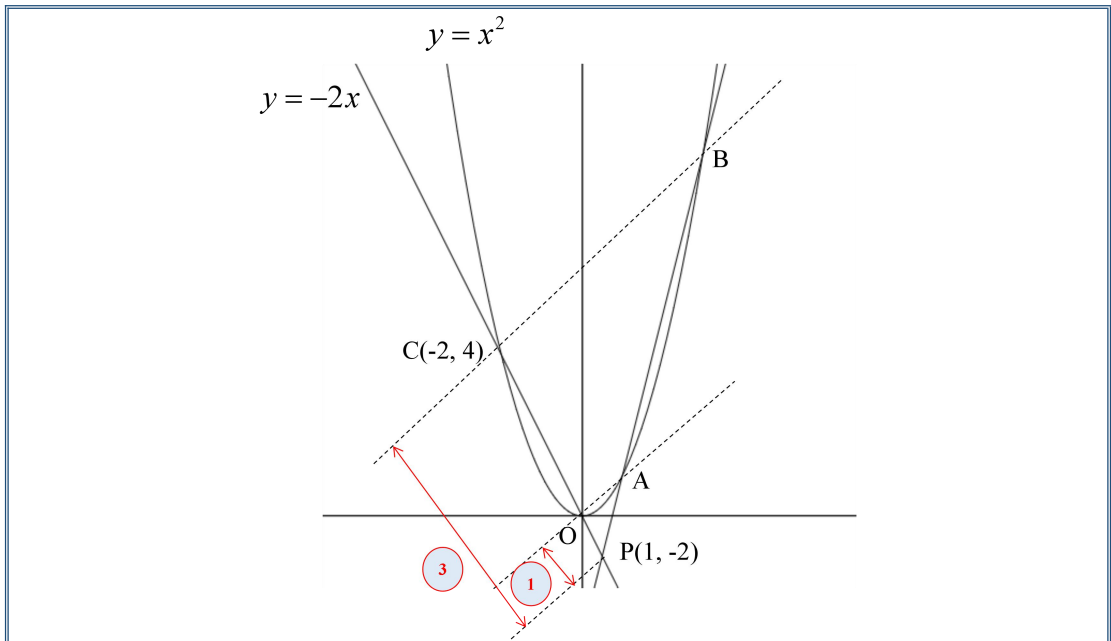
計算がメンドーになるので、できるだけ避けたいところです。

ここで、図と①②③を改めてながめると、

△PAO と △PBC が相似になっており、P、O、C の座標に着目すると

PO : PC = 1 : 3 で比例している

ことが分かります。



ということは、 $PA : PB = 1 : 3$ になりますね。

ここで①から $A(k, k^2)$ ($k > 0$) と置けば、 $PB = 3PA$ なので、

B の座標は

$$B(1+3(k-1), -2+3(k^2+2)) \Rightarrow (3k-2, 3k^2+4)$$

と表すことができます。

《補足》

$PB = 3PA$ から

座標 B = 座標 P + (座標 A と座標 P との差分) $\times 3$

が成り立ちます。

ここで点 B は放物線上にもあるので、点 B の y 座標について

$$3k^2 + 4 = (3k - 2)^2$$

と式を立てることができます。

ここから

$$6k^2 - 12k = 0$$

となり、 $k = 2$ ($k > 0$) と解くことができます。

《別解》

多少ややコシイですが、相似を使わずに、さきほど挙げた

点 A、B は放物線上にあるということ……①

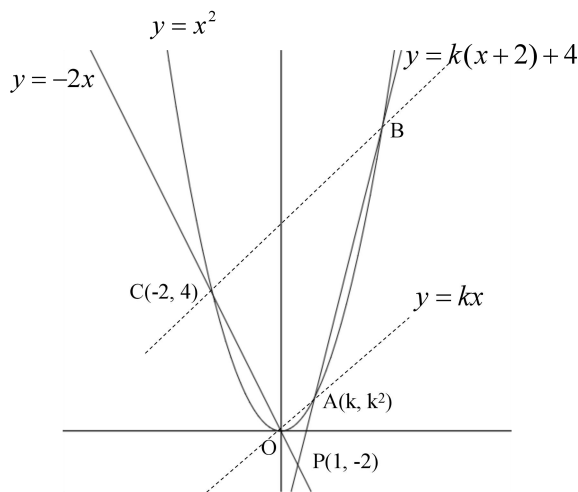
点 P、A、B は一直線上にあること……②

OA と BC が平行であること……③

をフツーに使うって解くことも可能ではあります。

まず、①から $A(k, k^2)$ ($k > 0$) と置けば、OA の傾きは $\frac{k^2}{k} = k$ となるので、

③から直線 BC は、傾きが k で点 $C(-2, 4)$ を通る直線ということで、
 $y = k(x + 2) + 4$ と表すことができます。



ここで点 B は放物線と直線 BC との交点であることに注目すると、

$x^2 = k(x + 2) + 4$ となり、これを解くと

$$x^2 - kx - 2k - 4 = 0$$

$$(x + 2)(x - k - 2) = 0$$

となります。

これを解くと B の x 座標は $k + 2$ となり ($x = -2$ は点 C の座標です)、

B ($k + 2, (k + 2)^2$) と表すことができます。

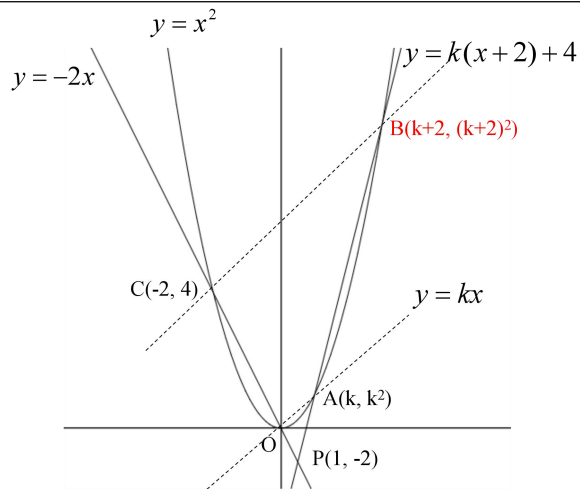
《補足》

$$x^2 - kx - 2k - 4 = 0$$

$$(x + 2)(x - k - 2) = 0$$

の因数分解が厄介ですが、放物線と直線 BC の双方が点 C を通るので、必ず

$(x + 2)$ で切り出すことができます。



これで、どうにか点 A、点 B の座標とも k を使って表すことができたので、
 あとは、②から PA 間と PB 間の傾きが等しいことを使いましょう。

つまり、

$$\frac{k^2 + 2}{k - 1} = \frac{(k + 2)^2 + 2}{(k + 2) - 1}$$

となり、ここから両辺の分母をはらって

$$(k^2 + 2)(k + 1) = (k^2 + 4k + 6)(k - 1)$$

$$2k^2 - 8 = 0$$

$$k = \pm 2$$

と解けます。 $k > 0$ なので、 $A(2, 4)$ となります。

このように相似を使わないとかなり骨が折れますが、なんとか解くことは可能です。